PLANO DE AULA

CENTRO EDUCACIONAL MUNICIPAL DE IOMERÊ
Diretora: Marta Maria Falchetti
Coordenadora: Tânia Gonçalves da Silva Bressan
Orientadora: Marinez Zanetti Zago
Secretária: Roseli Aparecida Fiuza da Rosa Civiero
Professor: Cesar Dacol
Disciplina: Matemática
Turma: 9ºs Anos
Data: 09/09/2020

ALUNOS: Todos os matriculados nos 9ºs Anos, M1, M2 e BS.

Tempo previsto para a realização:
Realização: 45 minutos. Aula no Meet: 25 minutos. Planejamento: 41 minutos. Atendimento/correção: 1 hora.

Objetivo da aula:
Equações polinomiais do 2º grau – Revisão de conteúdo: resolução de equações incompletas. Resolução de equações do 2º grau completas – ideias iniciais.

Habilidades:
EF09MA09 – Identificar os coeficientes a, b e c de uma expressão da forma $ax^2 + bx + c = 0$; Resolver uma equação do 2º grau completa.

Formas de Avaliação:
Será feita através da análise das respostas dadas pelo aluno às atividades ora propostas, bem assim como a eventual questionamento que denote uma participação mais efetiva e interessada do educando.

Metodologias, Práticas Pedagógicas e Ferramentas:
Utilização do volume 2 da apostila do Sistema Aprende Brasil da Editora Positivo, destinada ao 9º Ano - material didático fornecido pela escola - além de fontes de pesquisa alternativas tais como: livros, imagens, sites de internet, vídeo-aulas, etc.

ENUNCIADOS TEÓRICOS

EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU

A **equação do segundo grau** recebe esse nome porque é uma equação polinomial cujo termo de maior grau está elevado ao quadrado. Também chamada de equação quadrática, é representada por:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

Numa equação do 2º grau, o **x** é a incógnita e representa um valor desconhecido. Já as letras **a**, **b** e **c** são chamadas de coeficientes da equação.

Os coeficientes são números reais e o coeficiente **a** tem que ser diferente de zero, pois do contrário passa a ser uma equação do 1º grau.

Resolver uma equação de segundo Grau, significa buscar valores reais de **x**, que tornam a equação verdadeira. Esses valores são denominados raízes da equação.

Uma equação quadrática possui no máximo duas raízes reais.

Equações do 2º Grau Completas e Incompletas

As equações do 2º grau **completas** são aquelas que apresentam todos os coeficientes, ou seja a, b e c são diferentes de zero ($a, b, c \neq 0$).

Por exemplo, a equação $5x^2 + 2x + 2 = 0$ é completa, pois todos os coeficientes são diferentes de zero ($a = 5$, $b = 2$ e $c = 2$).

Uma equação quadrática é **incompleta** quando $b = 0$ ou $c = 0$ ou $b = c = 0$. Por exemplo, a equação $2x^2 = 0$ é incompleta, pois $a = 2$, $b = 0$ e $c = 0$

São **equações do 2º grau incompletas**, aquelas que podem ser resolvidas sem o uso da fórmula de Bhaskara ou do método da soma e produto. Basicamente, existem 3 tipos de equações do segundo grau incompletas, cujas raízes possuem um **comportamento definido**.

O que é uma equação do 2º grau incompleta?

O formato das equações do segundo grau é o famoso "$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$", em que a, o coeficiente que acompanha o termo x^2, jamais pode ser zero. Quando a, b e c são valores reais diferentes de zero, diz-se que a equação do 2º grau formada é completa.

Mas quando a é diferente de zero (e deve ser!) e b ou c ou ambos os coeficientes são iguais a zero, dizemos que a equação gerada é **incompleta.**

$\mathbf{ax^2 = 0}$ → Quando os coeficientes **b** e **c** são iguais a zero

$\mathbf{ax^2 + c = 0}$ → Quando o coeficiente **b** é igual a zero

$\mathbf{ax^2 + bx = 0}$ → Quando o coeficiente **c** é igual a zero

Você sabe por que o coeficiente *a* da equação do 2º grau não pode ser igual a zero? Não?

Por que não é necessário utilizar a fórmula de Bhaskara para resolver as equações do 2º grau incompletas?

Para entendermos porque é possível fugir da fórmula de Bhaskara e até do método da soma e produto para resolver as equações do 2º grau incompletas, vamos trazer à tona uma outra equação muito importante para a matemática: a **equação do 1º grau**.

$$3x – 6 = 0$$

$$3x = 6$$

$$x = 6/3$$

$$x = 2$$

Reparem no exemplo acima, que para resolver a equação do primeiro grau solicitada, foram utilizadas algumas operações básicas da matemática a fim de **isolar a incógnita x**. Ora, se as equações do 1º grau podem ser resolvidas assim, que tal utilizar o mesmo método para resolver as equações do 2º grau completas? Experimentem isolar a incógnita x das equações abaixo e tirem suas conclusões!

$$2x^2 + 3x – 5 = 0$$

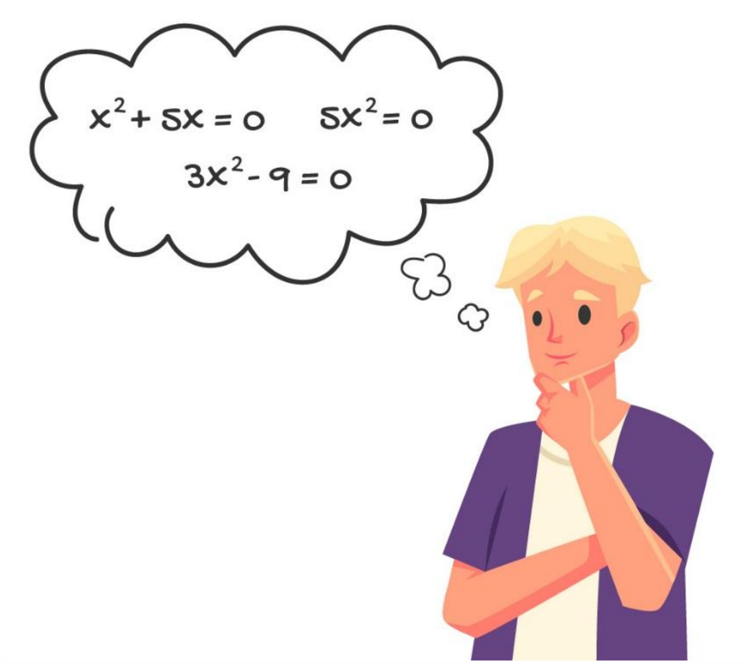
$$x^2 – x – 6 = 0$$

$$x^2 – 8x + 16 = 0$$

$$– x^2 + 2x – 2 = 0$$

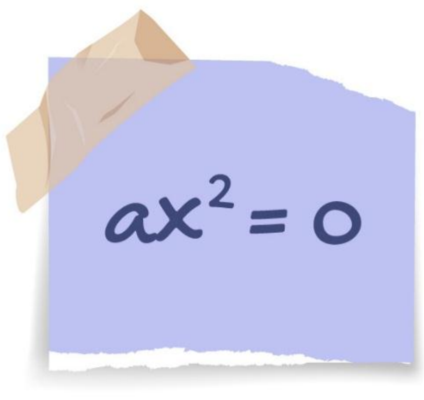
E aí, deu certo? Quando as equações do 2º grau estão em seu formato completo, não é possível isolar a incógnita x utilizando somente as operações básicas da matemática. Por isso, utilizamos a [fórmula de Bhaskara] ou o [método da soma e produto]. Contudo, quando as equações do 2º grau são incompletas, é possível isolar a incógnita x facilmente.

Como resolver as equações do 2º grau incompletas



Como foi dito no início, existem 3 tipos de equações do 2º grau incompletas, e as raízes de cada uma delas possuem um **comportamento definido**. Nós vamos estudar todos esses comportamentos nos próximos itens. Independentemente do tipo de equação apresentado, a essência das resoluções será sempre **isolar a incógnita x**.

Quando os coeficientes b e c são iguais a zero



Quando os coeficientes b e c de uma equação do 2º grau são iguais a zero, o coeficiente a pode assumir qualquer valor real diferente de zero. Independentemente deste valor, **as duas raízes da equação devem ser reais e iguais a zero**. É o que acontece na equação $5x^2 = 0$.

$$5x^2 = 0$$

$$x^2 = 0/5$$

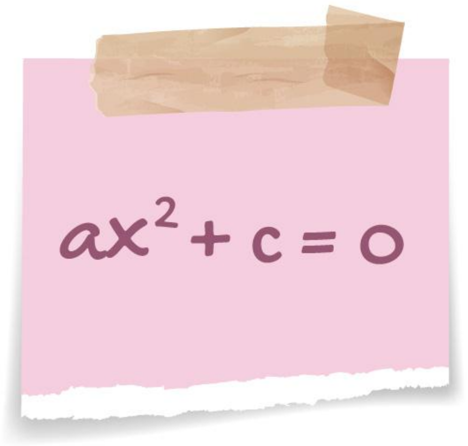
$$x = \pm \sqrt{0}$$

$$\mathbf{x = 0}$$

Em casos como esse, a solução da equação pode ser representada por um conjunto unitário.

$$S = \{0\}$$

Quando o coeficiente b é igual a zero



Quando apenas o coeficiente b de uma equação do 2º grau é igual a zero, as suas **duas raízes são reais, distintas e simétricas**. Isso significa que são dois valores **iguais em módulo**, mas de sinais opostos. Acompanhem a resolução da equação $3x^2 - 9 = 0$.

$$3x^2 - 9 = 0$$

$$3x^2 = 9$$

$$x^2 = 9/3$$

$$\mathbf{x = \pm \sqrt{3}}$$

$$S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

As raízes da equação $3x^2 - 9 = 0$ são iguais em módulo, $\sqrt{3}$, mas possuem sinais opostos, ou seja, uma delas é negativa e a outra é positiva. De maneira idêntica, vamos resolver a equação $x^2 - 4 = 0$ para verificar se o comportamento se repete.

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

$$S = \{-2, 2\}$$

Perfeito! As raízes da equação $x^2 - 4 = 0$ são reais, diferentes e simétricas, ou seja, são iguais em módulo, 2, mas possuem sinais opostos. Tendo isso em vista, até poderíamos seguir para o próximo tipo de equação do segundo grau incompleta. Contudo, um caso especial tal como o da equação $x^2 + 25 = 0$ necessita da nossa atenção. Fiquem de olho na resolução desta equação.

$$x^2 + 25 = 0$$

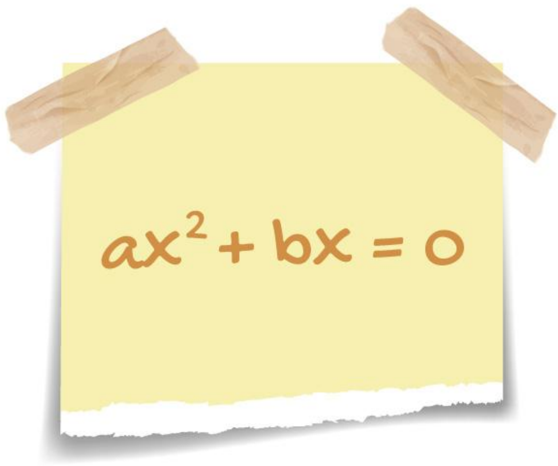
$$x^2 = -25$$

$$x = \pm\sqrt{(-25)}$$

E aí, pessoal, existe ou não existe raiz quadrada de número negativo? No conjunto dos números reais, certamente não! Portanto, algumas equações do 2º grau incompletas de formato "$ax^2 + c = 0$" **não possuem raízes reais**. Nestes casos, a solução da equação pode ser expressa por um conjunto vazio.

$$S = \{\ \}$$

Quando o coeficiente c é igual a zero



Quando apenas o coeficiente c de uma equação do 2º grau é igual a zero, as suas **duas raízes são reais e distintas**. Uma delas é sempre igual a zero, e a outra, pode ser qualquer número real diferente de zero.

Para resolver as equações do 2º grau incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$, é preciso utilizar um artifício diferente do que foi utilizado nos casos anteriores. Em princípio, devemos realizar a **fatoração por fator comum em evidência** da expressão "$ax^2 + bx$". Como o produto gerado a partir desta fatoração deve ser igual a zero, em seguida, vamos dar sequência ao cálculo tendo em mente que **para um produto ser igual a zero, basta que um de seus fatores seja igual a zero**.

$$x \cdot y = 0$$

$$\mathbf{0} \cdot y = 0$$

$$x \cdot \mathbf{0} = 0$$

Observem o produto entre os fatores x e y logo acima. Para que o resultado obtido a partir desse produto seja igual a zero, basta que x ou que y sejam iguais a zero.

Ficou claro, pessoal? Antes que qualquer dúvida surja, vamos encontrar as raízes de algumas equações do 2º grau do tipo $ax^2 + bx = 0$ aplicando esta técnica.

$x^2 + 5x = 0$

$$x^2 + 5x = 0$$

$$x \cdot (x + 5) = 0$$

$$\mathbf{x = 0}$$

$$x + 5 = 0$$

$$\mathbf{x = -5}$$

$$S = \{-5, 0\}$$

Reparem que logo no início da resolução, o fator comum, x, entre os dois termos da equação, x^2 e 5x, foi colocado em evidência. Assim, formou-se o produto entre os fatores “x” e “x + 5”. Para que o resultado deste produto fosse igual a zero, ou “x” ou “x + 5” deveriam ser iguais a zero. Igualando os dois fatores a zero, obtemos, imediatamente, uma das raízes da equação, x = 0. Em seguida, manipulando a equação x + 5 = 0, chegamos a segunda raiz, x = – 5.

$2x^2 - x = 0$

$$2x^2 - x = 0$$

$$x \cdot (2x - 1) = 0$$

$$\mathbf{x = 0}$$

$$2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$\mathbf{x = 1/2}$$

$$S = \{0, ½\}$$

$4x^2 - 6x = 0$

$$4x^2 – 6x = 0$$

$$2x \cdot (2x – 3) = 0$$

$$2x = 0$$

$$\mathbf{x = 0}$$

$$2x – 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$\mathbf{x = 3/2}$$

$$S = \{0, 3/2\}$$

Ficou mais claro, pessoal? Tenho certeza de que assim que vocês resolverem uma série de equações do 2º grau incompletas, esses processos ficarão extremamente simples!

Exercícios Resolvidos

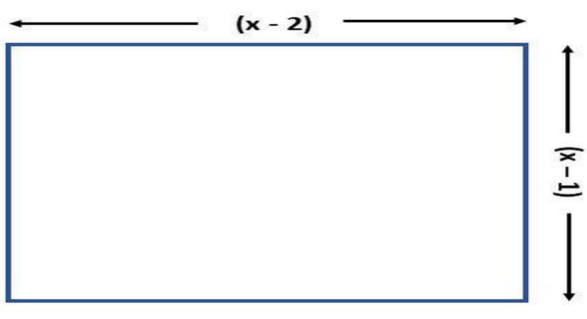
1) Determine os valores de **x** que tornam a equação $4x^2 - 16 = 0$ verdadeira.
Solução:
A equação dada é uma equação incompleta do 2º grau, com b = 0. Para equações deste tipo, podemos resolver, isolando o **x**. Assim:

$x^2 = 16/4 \Rightarrow x^2 = 4$ e $x = \sqrt{4} \Rightarrow +$ ou $– 2$.

Note que a raiz quadrada de 4 pode ser 2 e - 2, pois esses dois números elevados ao quadrado resultam em 4.

Assim, as raízes da equação $4x^2 - 16 = 0$ são **x = - 2** e **x = 2**

2) Encontre o valor do x para que a área do retângulo abaixo seja igual a 2.



Solução:
A área do retângulo é encontrada multiplicando-se a base pela altura. Assim, devemos multiplicar os valores dados e igualar a 2.

(x - 2) . (x - 1) = 2

Agora vamos multiplicar todos os termos:

x . x - 1 . x - 2 . x - 2 . (- 1) = 2
x^2 - 1x - 2x + 2 = 2
x^2 - 3x + 2 - 2 = 0
x^2 - 3x = 0
Após resolver as multiplicações e simplificações, encontramos uma equação incompleta do segundo grau, com c = 0.

Esse tipo de equação pode ser resolvida através da fatoração, pois o **x** se repete em ambos os termos. Assim, iremos colocá-lo em evidência.
x . (x - 3) = 0

Para o produto ser igual a zero, ou x = 0 ou (x - 3) = 0. Contudo, substituindo **x** por zero, as medidas dos lados ficam negativas, portanto, esse valor não será resposta da questão.
Então, temos que o único resultado possível é (x - 3) = 0. Resolvendo essa equação:

x - 3 = 0
x = 3
Desta forma, o valor do **x** para que a área do retângulo seja igual a 2 é **x = 3**.

Resolva as equações do 2º grau:

a) $4x^2 - 36 = 0$

$4x^2 = 36$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

$S = \{-3; 3\}$

b) $7x^2 - 21 = 0$

$7x^2 = 21$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

$S = \{\pm\sqrt{3}\}$

c) $x^2 + 9 = 0$

$x^2 = -9$

$x = \pm\sqrt{-9} \notin R$

$S = \{\ \}$

- Equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, com b = 0, você encontra duas raízes opostas.

d) $x^2 - 49 = 0$

$x = \pm\sqrt{49}$

$x = \pm 7$

$S = \{-7, 7\}$

e) $5x^2 - 20 = 0$

$x^2 = 20/5$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

f) $5.(x^2 - 1) = 4.(x^2 + 1)$

$5x^2 - 5 = 4x^2 + 4$

$5x^2 - 4x^2 = 4 + 5$

$x^2 = 9$

$S = \{-2, 2\}$

$x = \pm 3$

$S = \{-3, 3\}$

g) $x^2 - 7x = 0$

$x.(x - 7) = 0$

$x = 0$ ou $x - 7 = 0$

$x = 7$

$S = \{0; 7\}$

h) $3x^2 - 4x = 0$

$x.(3x - 4) = 0$

$x = 0$ ou $3x - 4 = 0$

$x = \frac{4}{3}$

$S = \left\{0; \frac{4}{3}\right\}$

i) $x^2 - \sqrt{3}\,x = 0$

$x.(x - \sqrt{3}) = 0$

$x = 0$ ou $x - \sqrt{3} = 0$

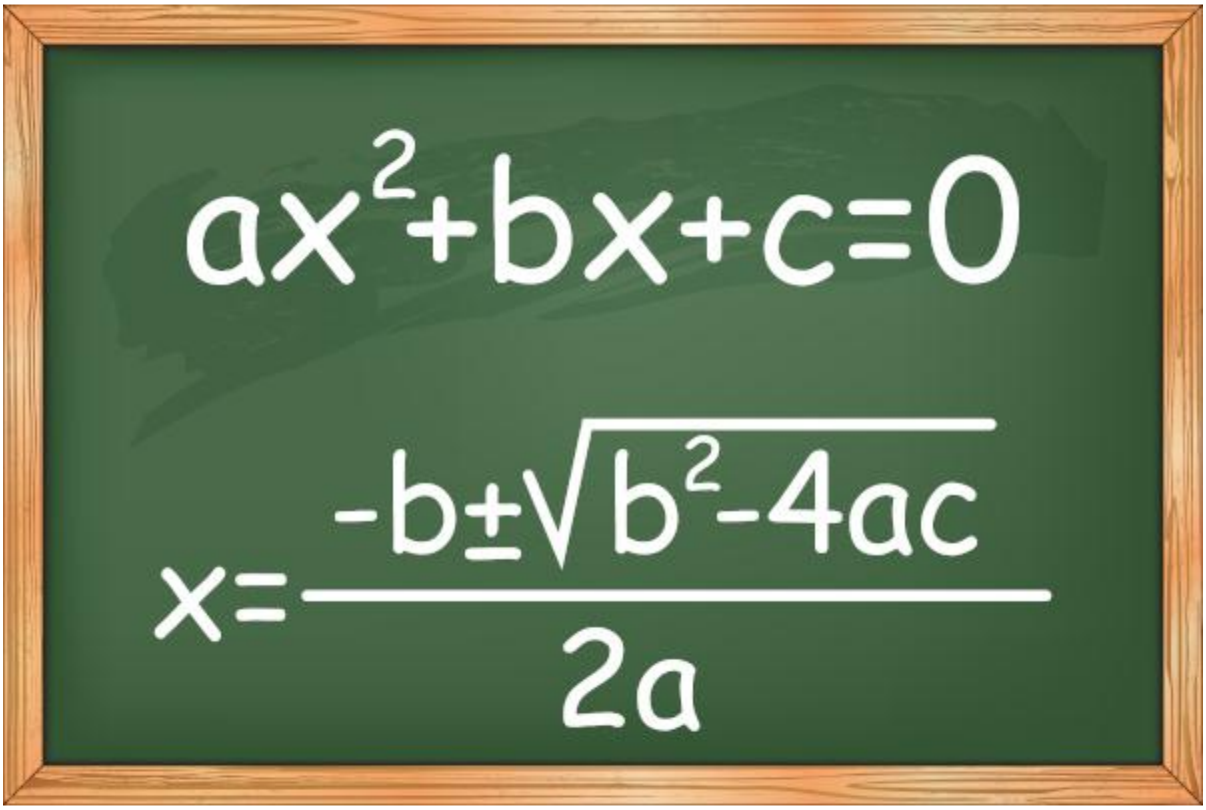
$x = \sqrt{3}$

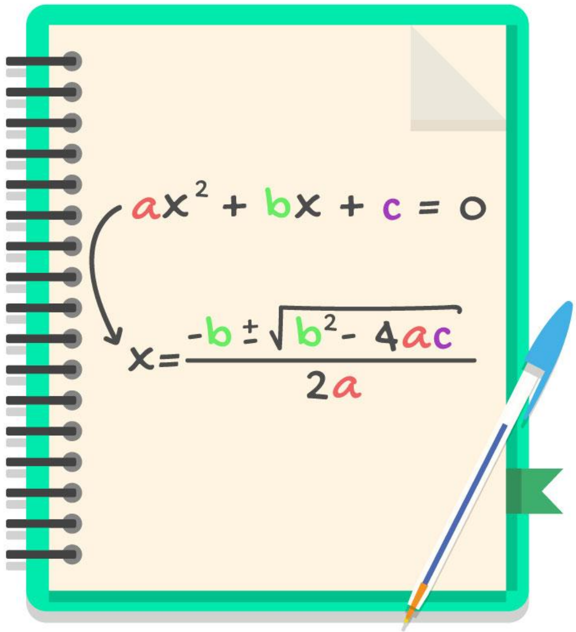
$S = \{0; \sqrt{3}\}$

Equações do 2º Grau Completas

As equações do 2º grau **completas** são aquelas que apresentam todos os coeficientes, ou seja a, b e c são diferentes de zero (a, b, c $\neq$ 0).

Por exemplo, a equação $5x^2 + 2x + 2 = 0$ é completa, pois todos os coeficientes são diferentes de zero (a = 5, b = 2 e c = 2).





A fórmula de Bháskara é utilizada para **resolver as [equações do 2º grau](#)**, ou seja, para encontrar as raízes da equação, tendo por base apenas os valores dos coeficientes a, b e c. Como a imagem acima sugere, para encontrarmos as raízes de uma equação do segundo grau, basta substituirmos os valores numéricos dos coeficientes a, b e c na fórmula de Bháskara, realizar as operações propostas por ela, e ao fim, teremos os valores desejados.

As [raízes da equação do 2º grau](#) costumam ser chamadas de x_1 e x_2, ou então, de x’ e x” e são sempre duas. Por isso, temos o sinal ± na fórmula de Bháskara. Para encontrar o valor da raiz x_1 ou x’, deve-se utilizar um dos sinais, por exemplo, o sinal positivo. Para encontrar o valor da raiz x_2 ou x”, basta utilizar o outro sinal, neste exemplo, o sinal negativo.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \text{ ou } x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 \text{ ou } x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

É muito importante que fique claro que não existe uma ordem específica para a distinção do sinal ± entre as raízes da equação do 2º grau. Poderíamos, sem problema algum, encontrar a raiz x_1 ou x’ com o sinal negativo e a raiz x_2 ou x” através do sinal positivo.

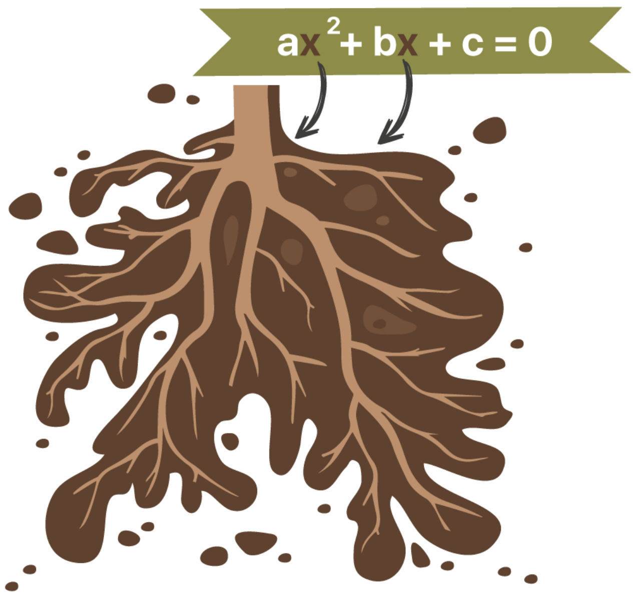
O discriminante da função quadrática na fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{Então, } \Delta = b^2 - 4ac$$

O valor numérico resultante da expressão “$b^2 - 4ac$” representa o chamado **discriminante da função quadrática (Δ)**. Através deste valor, é possível determinar se a equação do 2º grau possui duas raízes reais e distintas ($\Delta > 0$), duas raízes reais e iguais ($\Delta = 0$), ou ainda, duas raízes complexas ($\Delta < 0$).

COMO RESOLVER UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU?



Para resolver uma equação completa, a ideia é que comecemos a resolver pelo discriminante, e assim podemos resolver em dois passos a equação:

- Primeiro passo é encontrar o valor do discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$
- Então o segundo passo só deve ser resolvido se o valor de discriminante for maior ou igual a zero. Caso seja, usamos a expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se o valor do discriminante for negativo, não há como realizar o segundo passo levando em consideração o conjunto dos números reais. Portanto, a equação não possui uma solução real.

Vamos ver um exemplo:

Encontre a solução para a seguinte equação: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Resposta:

Observe que temos uma equação do segundo grau completa. Primeiro vamos encontrar os coeficientes da equação, isto é, os valores de **a**, **b** e **c**.

- $x^2 - 5x + 6 = 0$
  - $a = 1$
  - $b = -5$
  - $c = 6$

Vamos executar os passo para resolver essa equação:

Primeiro passo: ($\Delta = b^2 - 4ac$)

- $\Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1$ ($\Delta > 0$)

Como delta é maior que zero, vamos realizar o segundo passo.

Segundo passo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Temos que substituir na expressão acima os valores para os coeficientes **a**, **b**, e o resultado do cálculo do descriminante **Δ**. Logo,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

Agora temos que analisar em relação aos sinais de mais (+) e de menos (-). Para o sinal de mais vamos chamar a expressão de $\mathbf{x_1}$ e para o sinal de menos vamos chamar de $\mathbf{x_2}$.

Para $\mathbf{x_1}$ temos:

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Para $\mathbf{x_2}$ temos:

$$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Na expressão já tínhamos o **-b** e ao adicionar o **-5** ficou **-(-5)**, então **–(–5) = 5**. E a raiz quadrada de 1 é 1, esse 1 vem do resultado do primeiro passo que foi o cálculo do descriminante **Δ**. No mais não há segredo.

Dessa forma, encontramos as duas raízes que formam o conjunto solução da equação dada neste exemplo. O conjunto solução que resolve a equação, que torna ela verdadeira.

Logo, **S = {2, 3}**

Veja:

Se substituirmos as raízes, veremos que elas realmente resolvem a equação.

$$\begin{aligned} 2^2 - 5 \times 2 + 6 = 0 \Rightarrow \\ 4 - 10 + 6 = 0 \Rightarrow \\ 4 - 4 = 0 \Rightarrow \\ 0 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Temos uma igualdade para a raiz de número 2.

$$\begin{aligned} 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 0 \Rightarrow \\ 9 - 15 + 6 = 0 \Rightarrow \\ 9 - 9 = 0 \Rightarrow \\ 0 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Também temos uma igualdade para a raiz de número 3. Portanto, encontramos realmente as raízes que resolvem essa equação.

Vamos ver outro exemplo para o caso em que **Δ = 0**.

Encontre as raízes da equação: **$4x^2$ – 4x + 1 = 0**.

Pela equação temos os coeficientes:

- **a = 4**
- **b = -4**
- **c = 1**

Primeiro passo: vamos calcular o discriminante (**Δ = b^2 – 4ac**):

- **Δ = $(-4)^2$ – 4 . 4 . 1 = 16 – 16 = 0**

Segundo passo: substituir os valores na expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Substituindo os valores aos coeficientes correspondentes, temos:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \times 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Portanto, **S = {½}**.

Perceba que quando **Δ = 0** temos somente uma raiz que resolve a equação.

Vamos ver agora um exemplo para o caso em que **Δ < 0**, ou seja, **Δ** negativo.

Calcule as raízes da equação: $\mathbf{5x^2 + x + 6 = 0}$.

Os coeficientes da equação são:

- **a = 5**
- **b = 1**
- **c = 6**

Primeiro passo é calcular o **Δ** ($\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$):

- $\mathbf{\Delta = 1^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 1 - 120 = -119}$

Como temos **Δ < 0**, ou seja, o valor do descriminante é negativo, não conseguiremos realizar o segundo passo. Dessa forma, não há como encontrar raízes para essa equação no conjunto dos reais. Portanto, o conjunto solução para essa equação é vazio: **S = {} = Ø**

Para finalizar vamos resolver um problema de equação do segundo grau mais complexo, onde precisaremos simplificar as raiz.

Resolva a seguinte equação: $\mathbf{x^2 + 6x + 7 = 0}$

Vamos descrever os coeficientes:

- **a = 1**
- **b = 6**
- **c = 7**

Calculando o **Δ**: **Δ = b² – 4ac**:

- **$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 36 - 28 = 8$**

Segundo passo é substituir os valores na expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Para $\mathbf{x_1}$, temos:

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{-6 + 2\sqrt{2}}{2} = -3 + \sqrt{2}$$

Para $\mathbf{x_2}$, temos:

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{-6 - 2\sqrt{2}}{2} = -3 - \sqrt{2}$$

Essa é uma resposta mais complexa pois tivemos que simplificar a raiz. Após a simplificação, dividimos os valores no numerador por 2.

ATIVIDADES

Leia os enunciados acima, assim como os constantes das páginas 54 e 55, após o que, procure resolver os exercícios números 1, 2, 3, 4, 7 da página 56, o qual termina na página 57, do volume 2 da apostila do Sistema Aprende Brasil editada para o 9º Ano.

Lembre-se: todas as atividades aqui citadas serão avaliadas, por isso, é IMPRESCINDÍVEL que, após feitas, sejam encaminhadas – obrigatoriamente - através do Google Classroom/Sala de Aula.

Quaisquer dúvidas e/ou questionamentos poderão ser feitos em qualquer um dos endereços abaixo:

WhatsApp – 49 9972 4950, ou e-mail cesardacol@iomere.edu.sc.gov.br